PART3　面積の最大・最小

3　放物線 $y=x^2-2x-3$ と直線 $y=ax$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ の最小値を求めよ。

Point Pickup

放物線と直線が 2 点で交わるとき，交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$とすると，放物線と直線によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ で求められる。ただし，a は放物線の式の x^2 の係数。

第19講　PART3　確認問題

1　放物線 $y=6x^2$ を C，点$(1,\ 12)$を通る傾きが a の直線を l とし，C と l で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ の最小値を求めよ。

最小値 [ア]

PART3　面積の最大・最小

3　放物線 $y=x^2-2x-3$ と直線 $y=ax$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ の最小値を求めよ。

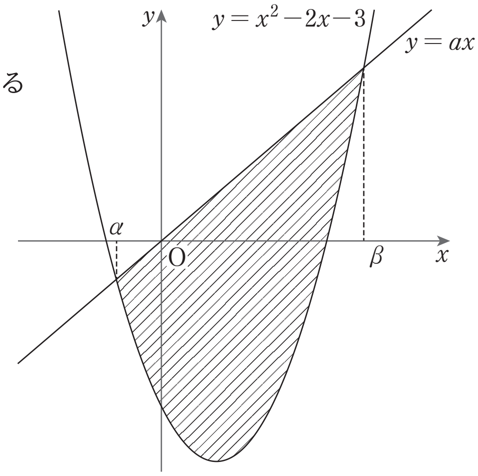
放物線 $y=x^2-2x-3$ と直線 $y=ax$ の共有点の x 座標は

$$x^2-2x-3=ax \quad \text{すなわち} \quad x^2-(a+2)x-3=0$$

の実数解である。この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(a+2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=(a+2)^2+12$$

より，常に $D>0$ であるから，放物線と直線は常に異なる 2 交点をもつ。2 交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$とすると



$$S(a)=\int_\alpha^\beta\left\{ax-\left(x^2-2x-3\right)\right\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta\left\{x^2-(a+2)x-3\right\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ここで

$$\beta-\alpha=\frac{a+2+\sqrt{D}}{2}-\frac{a+2-\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}=\sqrt{(a+2)^2+12}$$

であるから，$a=-2$ のとき最小となり，このとき $S(a)$ も最小となる。

よって，その最小値は

$$S(-2)=\frac{1}{6}(\sqrt{12})^3=4\sqrt{3}$$

第 19 講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：8

[解説]

直線 l の方程式は

$$y=a(x-1)+12$$

すなわち　$y=ax-a+12$

放物線 C と直線 l の共有点の x 座標は

$$6x^2=ax-a+12$$

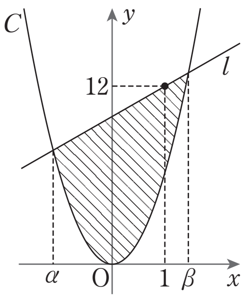
すなわち

$$6x^2-ax+a-12=0$$

の実数解である。この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=a^2-4\cdot 6\cdot(a-12)=(a-12)^2+144$$

よって，つねに $D>0$ であるから，放物線 C と直線 l はつねに異なる 2 つの共有点をもつ。



2 つの共有点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると [A]

$$S(a)=\int_\alpha^\beta\{(ax-a+12)-6x^2\}dx$$

$$=-6\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-6\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=(\beta-\alpha)^3$$ [B]

ここで

$$\beta-\alpha=\frac{a+\sqrt{D}}{12}-\frac{a-\sqrt{D}}{12}=\frac{\sqrt{D}}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{(a-12)^2+144}}{6}$$

[A]　放物線と直線の 2 つの共有点の x 座標を α，β とおくと，放物線と直線で囲まれた部分の面積は，$\beta-\alpha$ で表すことができる。

[B]　積分の公式

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

であるから，$a=12$ のとき最小となり，このとき

$S(a)$ も最小となる。

よって，$S(a)$ の最小値は

$$S(12)=\left(\frac{\sqrt{144}}{6}\right)^3=2^3=8$$